Panel "Econometría y Métodos Matemáticos"

5 de Mayo de 2015

Integrando conceptos de economía, agronomía y métodos estadístico-computacionales usando estructuras de datos voluminosas - *big data*

La especificación y ajuste de una función de producción para el cultivo del olivo en el Valle de Famatina, Argentina

Dr. Walter Robledo

Dpto. de Economía y Finanzas
Escuela de Graduados

Escuela de Economía y
Dpto. De Básicas y Tecnológicas
Universidad Nacional de Chilecito - UNdeC

Contenido de la Ponencia

1. Introducción:

   a) Acerca del rol de las Matemáticas y la Estadística en la gestión del conocimiento científico.

   b) Acerca del uso de las Matemáticas y la Estadística en el campo de las Ciencias Económicas, en particular.

2. La integración de conceptos de Matemática, Estadística y Economía: el caso de realizaciones de procesos estocásticos indexados espacial y/o temporalmente, ordenadas en grandes bases de datos – *big data.*

3. Aplicación ilustrativa: especificación y ajuste de una función de producción para el diseño de un manejo agronómico sitio-específico, económicamente eficiente, en el cultivo del olivo en el Valle de Famatina, Argentina

4. Consideraciones finales.

Introducción: Rol de las Matemáticas y la Estadística en la gestión del conocimiento científico

Definición 1: Del método científico hipotético-deductivo

Bacon, F. (1605, 1620); Popper, K. (1934) ; Bunge, M. (1969)

Proceso de pensamiento que se basa en:

a) la observación del fenómeno a estudiar,
b) la formulación de una hipótesis para explicarlo,
c) deducción de consecuencias o proposiciones más elementales que la propia hipótesis, y
d) Inducción: verificación o comprobación de la verdad de los enunciados deducidos comparándolos con la experiencia y conocimientos establecidos

Proposición 1:

Las Matemáticas se basan, en general, en el proceso de razonamiento "*hipotético deductivo*"

Demostración: ejercicio para el público interesado ☺

Ayuda: ver Popper, K. (1934)

Introducción: Rol de las Matemáticas y la Estadística en la gestión del conocimiento científico

Corolario 1:

El estudio de las Leyes de Probabilidad y conceptos relacionados (variables aleatorias, funciones de probabilidad y densidad, convergencia en distribución, etc.) pertenecen al campo de las Matemáticas, conocida como Estadística-Matemática

Demostración: ejercicio para el público interesado ☺

Ayuda: ver literatura cursos de grado de Estadística

Introducción: Rol de las Matemáticas y la Estadística en la gestión del conocimiento científico

Definición 2: Del método científico hipotético-inferencial

Bool, G. (1865), Pierce, C.S. (1877, 1878); Popper, K. (1934) ; Bunge, M. (1969)

Proceso de razonamiento que se basa en:

a) la observación del fenómeno a estudiar,

b) la formulación de una hipótesis para explicarlo,

c) inferencia de una regla o ley general a partir del análisis de un hecho/caso/resultado (datos muestrales) particular que permite falsear o no la hipótesis planteada

Proposición 2:

Las Metodologías Estadísticas diseñadas para la estimación y prueba de hipótesis acerca de parámetros distribucionales (escuelas frecuentista y bayesiana), que referenciaremos en esta ponencia como Estadística, se basan en el proceso de razonamiento "*hipotético-inferencial*"

Introducción: Uso de las Matemáticas y la Estadística en el campo de las Ciencias Económicas

Proposición 3: Silberberg, E. (1978, 1990)

Los matemáticos estudian Matemáticas por su belleza y elegancia. Los científicos la estudian porque es útil.

Proposición 3 “aggiornada”:

Los matemáticos y los estadísticos-matemáticos estudian lo que estudian como un fin en sí mismo. Los científicos no matemáticos, ej.: economistas, biólogos, agrónomos, médicos, entre otros, estudian Matemáticas, Estadística-matemática y Estadística como un medio para lograr un fin.

2. La integración de conceptos de Matemáticas, Estadística y Economía: Un par de ejemplos

Ejemplo 1: Modelos ARMA (Box y Jenkins, 1976)

Teorema: Descomposición de Wold

Sea y_t un proceso estocástico de covarianza estacionario y esperanza cero, luego:

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} + \delta_t$$

Donde: $$\begin{cases} \Psi_0 = 1 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j^2 < \infty \\ \varepsilon_{t-j} \sim N(0,\sigma^2) \\ \delta_t \text{ es una componente determística lineal independiente de } \varepsilon_{t-j} \end{cases}$$

Demostración: Brockwell y Davis (2002), Box y Jenkins (1976)

2. La integración de conceptos de Matemáticas, Estadística y Economía: Un par de ejemplos

Ejemplo 1 - Continuación: Modelos ARMA (Box y Jenkins, 1976)

Problema: Infinitos parámetros en la Descomposición de Wold

Solución: Usando el concepto de operador Lag, plantearon y demostraron matemáticamete la igualdad entre la Decomposición de Wold y el cociente de dos polinomios en el operador Lag, de orden p y q finitos ambos, para reducir la dimensionalidad del problema

Teorema: bajo las condiciones del teorema de la descomposición de Wold,

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \varepsilon_{t-j} + \delta_t = \frac{c}{1-\phi_1-\cdots-\phi_p} + \Psi(L)\varepsilon_t$$

$$\Psi(L) = \frac{1+\theta_1 L+\cdots+\theta_q L^q}{1-\phi_1 L-\cdots-\phi_p L^p}$$

2. La integración de conceptos de Matemáticas, Estadística y Economía: Un par de ejemplos

Ejemplo 2 : Cointegración, Modelo de Corrección del Error y Estimación por Maximaverosimilitud Restringida (Engle y Granger, 1987; Davidson et al (1978); Johansen (1988, 1991)

Problema: El modelo de regresión lineal múltiple y multivariada (VAR) que se postula válido para explicar el proceso económico relaciona procesos estocásticos integrado de orden 1; problema de regresión espuria potencialmente presente :

$$\underset{\sim}{x}_t = \mu + \sum_{j=1}^{p} \underset{\sim}{x}_{t-j} + \underset{\sim}{\varepsilon}_t$$

donde :

$\underset{\sim}{x}_t$ es un vector $kx1$ que contiene los procesos de interés

μ es un vector $kx1$ de constantes

$\underset{\sim}{\varepsilon}_t \sim NMV(0,\Sigma)$

2. La integración de conceptos de Matemáticas, Estadística y Economía: Un par de ejemplos

Ejemplo 2 : Cointegración, Modelo de Corrección del Error y Estimación por Maximaverosimilitud Restringida (Engle y Granger, 1987; Davidson et al (1978); Johansen (1988, 1991)

Solución matemática (ECM) que preserva el modelo económico:

Mediante sumas y restas de términos retardados de los procesos involucrados, de forma conveniente, se reescribe el modelo original en diferencias:

$$\Delta \underset{\sim}{x}_t = \mu + \underbrace{\underset{\sim}{\alpha}\underset{\sim}{\beta}' \underset{\sim}{x}_{t-p}}_{\text{largo plazo}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{p-1} \Gamma_j \Delta \underset{\sim}{x}_{t-j}}_{\text{largo plazo}} + \underset{\sim}{\varepsilon}_t$$

2. La integración de conceptos de Matemáticas, Estadística y Economía: Un par de ejemplos

Ejemplo 2 : Cointegración, Modelo de Corrección del Error y Estimación por Maximaverosimilitud Restringida (Engle y Granger, 1987; Davidson et al (1978); Johansen (1988, 1991)

Solución estadística (que preserva el modelo económico):

Máxima Verosimilitud restringida a la dimensionalidad del espacio de cointegración (rango de la matriz $\alpha\beta'$)…..

Que es equivalente a la metodología del análisis multivariado conocida como “correlaciones canónicas” descriptas por Sir Ronald Fisher a finales de la década de 1920 para conducir estudios con datos de origen agrícola en la Estación Experimental de Rodamsted, Inglaterra

2. La integración de conceptos de Matemáticas, Estadística y Economía: Un par de ejemplos

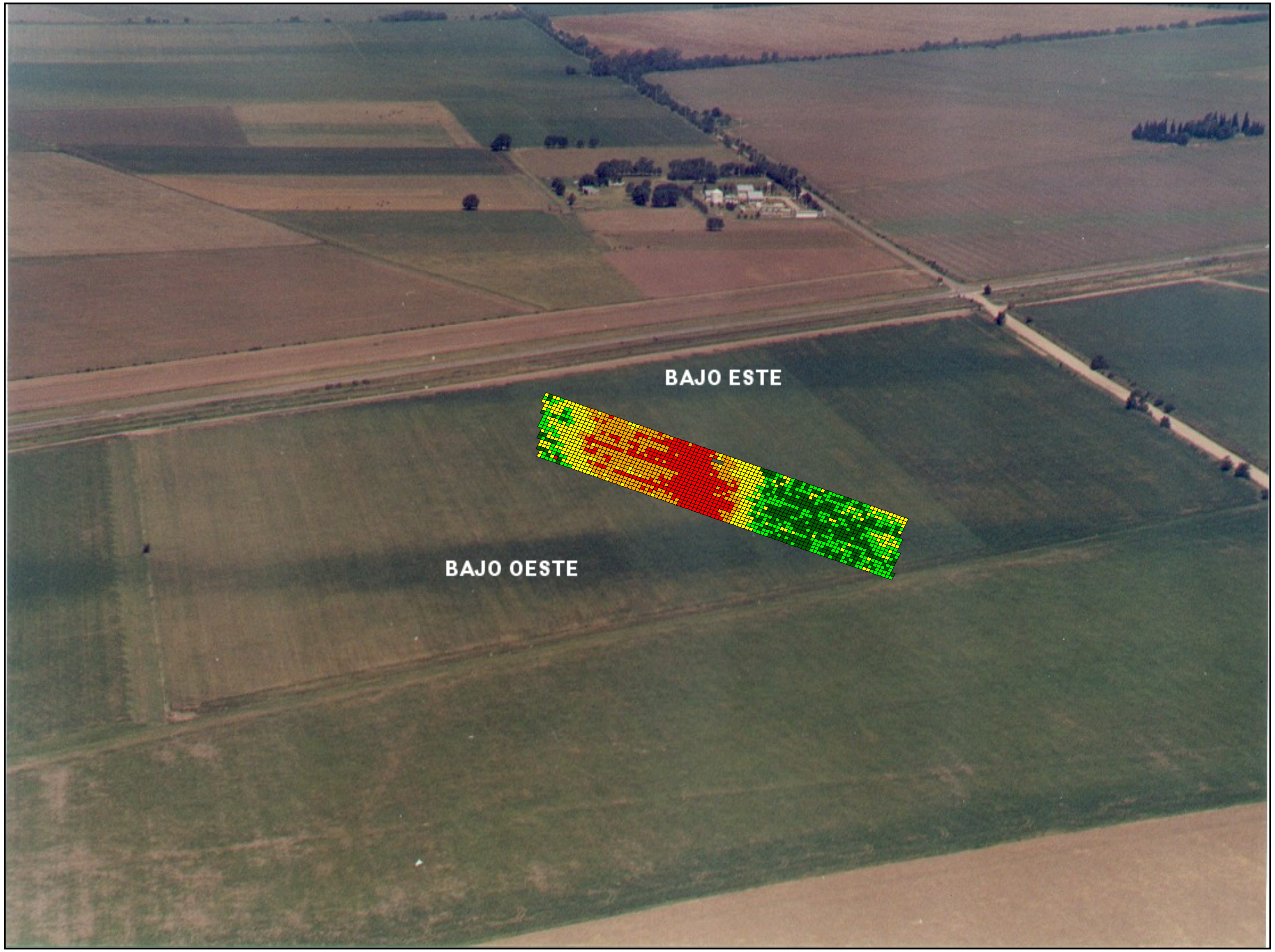
Ejemplo 2 : Cointegración, Modelo de Corrección del Error y Estimación por Maximaverosimilitud Restringida (Engle y Granger, 1987; Davidson et al (1978); Johansen (1988, 1991)

Solución estadística (que preserva el modelo económico):

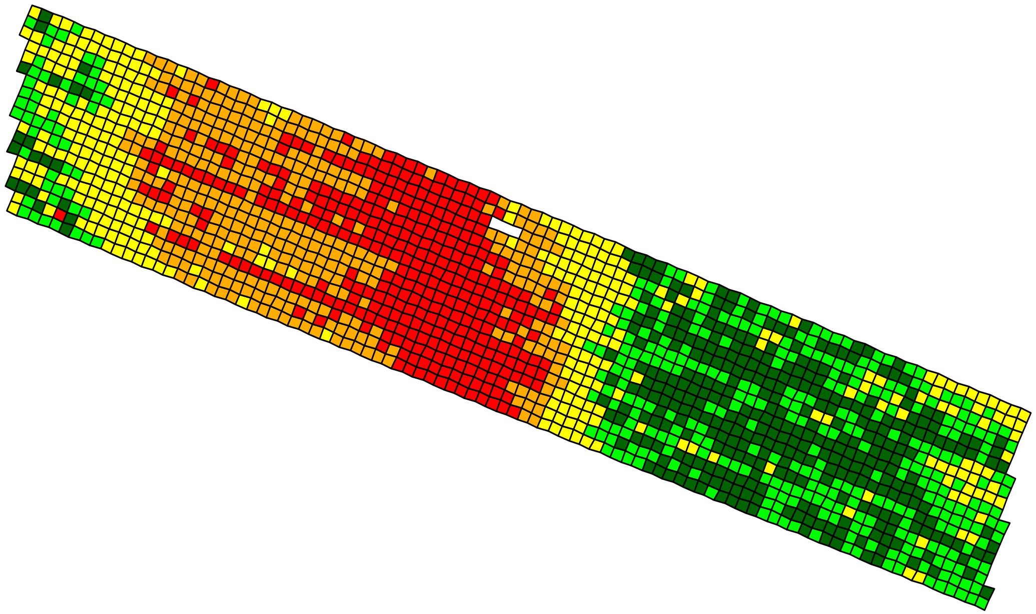
Máxima Verosimilitud restringida a la dimensionalidad del espacio de cointegración (rango de la matriz $\alpha\beta'$)…..

Que es equivalente a la metodología del análisis multivariado conocida como “correlaciones canónicas” descriptas por Sir Ronald Fisher a finales de la década de 1920 para conducir estudios con datos de origen agrícola en la Estación Experimental de Rodamsted, Inglaterra

3. La integración de conceptos de Mat+Est+Ec: Una aplicación en el cultivo del Olivo



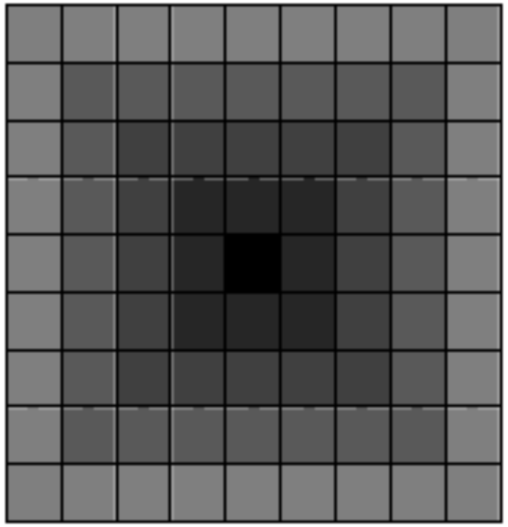
3. La integración de conceptos de Mat+Est+Ec: Una aplicación en el cultivo del Olivo



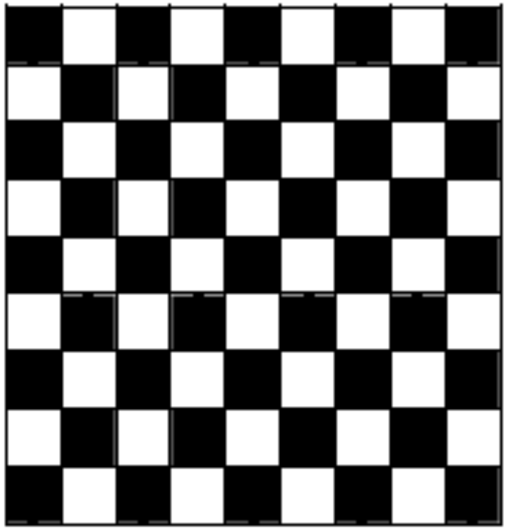
3. La integración de conceptos de Mat+Est+Ec: Una aplicación en el cultivo del Olivo

1) Los datos de rendimiento, presentan (Robledo y Espósito, 2009):

- ✓ Autocorrelación espacial: $E[y_i y_j] \neq 0$



(+)



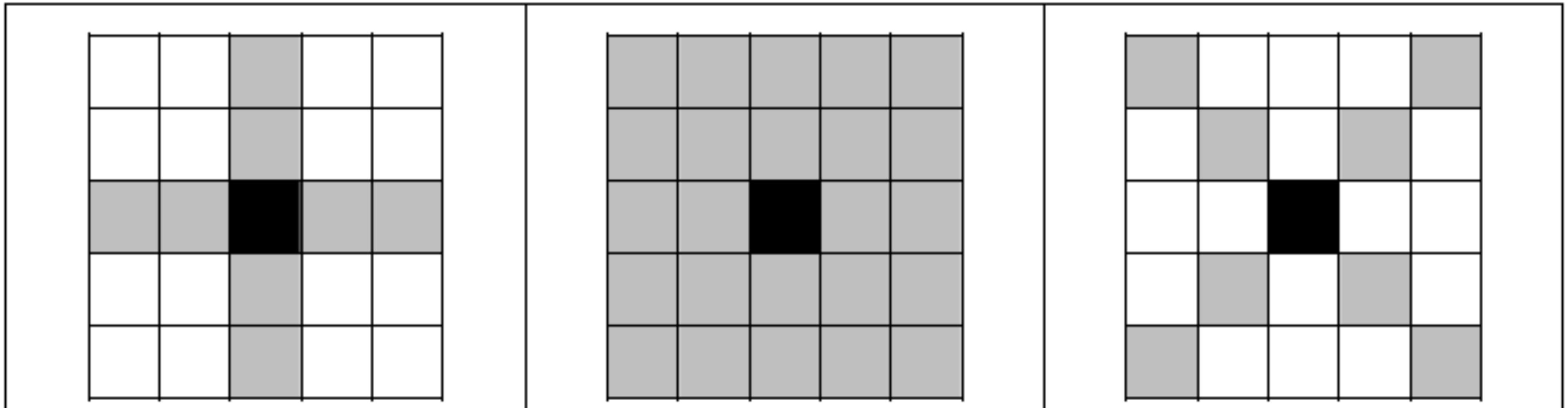
(-)

3. La integración de conceptos de Mat+Est+Ec: Una aplicación en el cultivo del Olivo

1) Los datos de rendimiento, presentan (Robledo y Espósito, 2009):

- ✓ Autocorrelación espacial: $E[y_i y_j] \neq 0$

Posibles especificaciones del concepto de "vecinos" de segundo orden



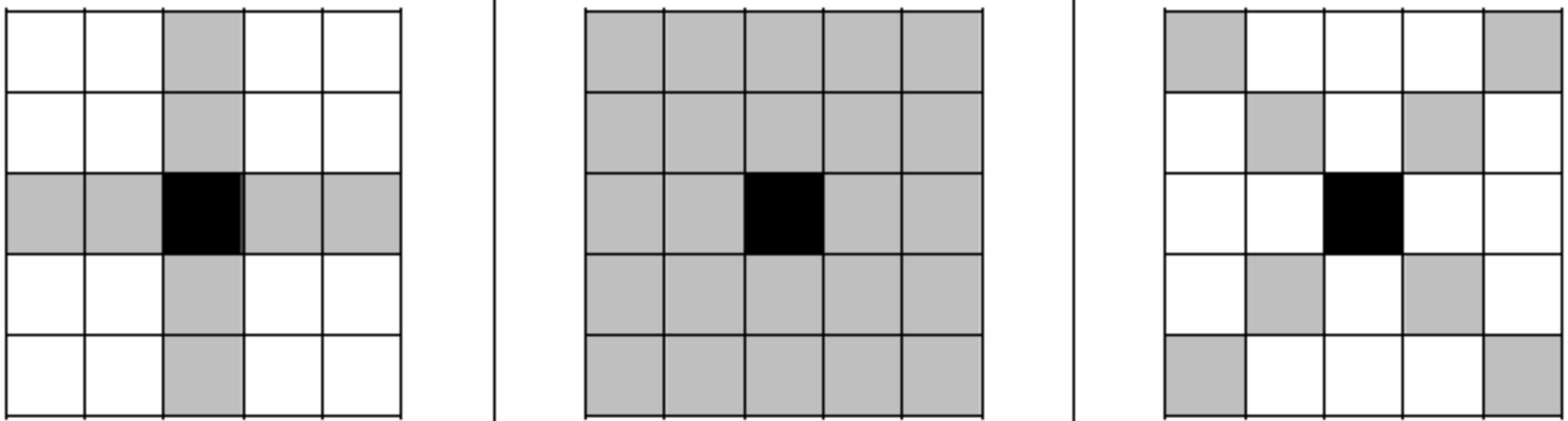
Matriz torre (rook) de primer orden · *Matriz reina (queen) de primer orden* · *Matriz alfil (bishop) de primer orden*

3. La integración de conceptos de Mat+Est+Ec: Una aplicación en el cultivo del Olivo

1) Los datos de rendimiento, presentan (Robledo y Espósito, 2009):

- ✓ Autocorrelación espacial: $E[y_i y_j] \neq 0$

Posibles especificaciones del concepto de “vecinos” de segundo orden



Matriz torre (rook) de primer orden | *Matriz reina (queen) de primer orden* | *Matriz alfil (bishop) de primer orden*

3. La integración de conceptos de Mat+Est+Ec: Una aplicación en el cultivo del Olivo

1) Los datos de rendimiento, presentan (Robledo y Espósito, 2009):

✓ Autocorrelación espacial: $E[y_i y_j] \neq 0$

Una posible matriz D de vecinos o "matriz de interacciones" para formalizar el concepto de correlación espacial de primer orden en grillas regulares de datos espaciales

	1	2	3	
	4	5	6	
	7	8	9	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	1	0	1	0	0
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0
6	0	0	1	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	1	0	1	0	1
9	0	0	0	0	0	1	0	1	0

3. La integración de conceptos de Mat+Est+Ec: Una aplicación en el cultivo del Olivo

1) Los datos de rendimiento, presentan (Robledo y Espósito, 2009):

- ✓ Autocorrelación espacial: $E[y_i y_j] \neq 0$

Una posible matriz D de vecinos o “matriz de interacciones” para formalizar el concepto de correlación espacial de primer orden en grillas regulares de datos espaciales

	1	2	3	
	4	5	6	
	7	8	9	

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0
2	1	0	1	0	1	0	0	0	0
3	0	1	0	0	0	1	0	0	0
4	1	0	0	0	1	0	1	0	0
5	0	1	0	1	0	1	0	1	0
6	0	0	1	0	1	0	0	0	1
7	0	0	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	1	0	1	0	1
9	0	0	0	0	0	1	0	1	0

3. La integración de conceptos de Mat+Est+Ec: Una aplicación en el cultivo del Olivo

1) Los datos de rendimiento, presentan (Robledo y Espósito, 2009):

- ✓ Autocorrelación espacial: $E[y_i y_j] \neq 0$

La matriz W de pesos espaciales estandarizada por filas, en la que cada elemento di,j es dividido por la suma de los elementos de la fila j :

$$\frac{w_{ij}}{\sum_{j \in J} w_{ij}}$$

con $\sum_{j \in J} w_{ij} = w_{i\bullet} = 1$

Notar que W es asimétrica.

3. La integración de conceptos de Mat+Est+Ec: Una aplicación en el cultivo del Olivo

1) Los datos de rendimiento, presentan (Robledo y Espósito, 2009):

- ✓ Autocorrelación espacial: $E[y_i y_j] \neq 0$
,
- ✓ Heterocedasticidad: $E[\varepsilon_i^2] \neq \sigma^2$
- ✓ Posible estructura no estacionariedad 2do orden
.

2) La variabilidad temporal (año de producción) y espacial (localización de lotes y fincas) es una fuente potencial de información para mejorar las estimaciones de los parámetros especificados como la de las predicciones espaciales y futuras (Espósito, 2014).

HIPOTESIS

La respuesta y la variabilidad espacial y temporal de los rendimientos del cultivo de olivo bajo distintas conducciones agronómicas puede modelarse bajo un enfoque combinado de la teoría de los modelos estadísticos mixtos y de la econometría espacial para mejorar las precisiones de las estimaciones y de proyecciones de interés económico

El modelo “Spatial Autoregresive Lag” o “Conditional Autoregresivo” - CAR:

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \mathbf{X}\beta + \varepsilon, \qquad \mathbf{y} \text{ es } n \times 1$$

$|\rho| < 1$, es un coeficiente escalar que describe la relación espacial entre $\mathbf{y}$ y $\mathbf{W}_1\mathbf{y}$

$\mathbf{W}_1$ es una matriz estandarizada de pesos espaciales

$\mathbf{W}_1\mathbf{y}$ es la variable espacial "lagged"

$\mathbf{X}_{n\times k}$ contiene variables explicativas de "efectos fijos"

$\beta_{k\times 1}$ es un vector de coeficientes de regresión

$\varepsilon_{n\times 1} \sim NMV(0, \Omega_\varepsilon)$

El modelo “Spatial Autoregresive Error” - SAR:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \lambda \mathbf{W}_2 \varepsilon + v, \qquad v \sim NMV(0, \sigma_v^2 \mathbf{I})$$

$\mathbf{W}_2$ es una matriz estandarizada de pesos espaciales

$|\lambda| < 1$, es un coeficiente escalar que describe la relación espacial entre ε y $\mathbf{W}_2\varepsilon$

$\mathbf{X}_{n\times k}$ contiene variables regresoras de "efectos fijos"

$\beta_{k\times 1}$ es un vector de coeficientes de regresión

El modelo CAR-SAR

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \mathbf{X}\beta + \varepsilon,$$

$$\varepsilon = \lambda \mathbf{W}_2 \varepsilon + v, \qquad v \sim NMV(0, \sigma_v^2 \mathbf{I})$$

$\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ matrices estandarizadas de pesos espaciales

$|\rho| < 1$, es un coeficiente escalar que describe la relación espacial entre $\mathbf{y}$ y $\mathbf{W}_1\mathbf{y}$

$|\lambda| < 1$, es un coeficiente escalar que describe la relación espacial entre ε y $\mathbf{W}_2\varepsilon$

$\mathbf{W}_1\mathbf{y}$ es la variable espacial "lagged"

$\mathbf{X}_{n\times k}$ contiene variables explicativas de "efectos fijos"

$\beta_{k\times 1}$ es un vector de coeficientes de regresión

El modelo CAR-SAR con regresoras de “efectos fijos” y “efectos aleatorios”
CAR-SAR DE EFECTOS MIXTOS: MEME
(Robledo y Espósito, 2009)

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \varepsilon,$$ En nuestra aplicación: $\mathbf{y}$ representa "rendimiento"

$$\varepsilon = \lambda \mathbf{W}_2 \varepsilon + u, \quad u \sim NMV(0, \sigma_u^2 \mathbf{I})$$

$\mathbf{W}_1$ y $\mathbf{W}_2$ matrices estandarizadas de pesos espaciales

$\rho |< 1$, es un coeficiente escalar que describe la relación espacial entre $\mathbf{y}$ y $\mathbf{W}_1\mathbf{y}$

$|\lambda |< 1$, es un coeficiente escalar que describe la relación espacial entre ε y $\mathbf{W}_2\varepsilon$

$\mathbf{W}_1\mathbf{y}$ es la variable espacial "lagged"

$\mathbf{X}_{n\times k}$ contiene variables explicativas "de efectos fijos"

En nuestra aplicación: Poda, Orientación Lineas, Topografía, Interacciones

$\beta_{k\times 1}$ es un vector de coeficientes de regresión

$Z_{n\times r}$ contiene variables explicativas "de efectos aleatorios"

En nuestra aplicación: Año, Localidades

$\mathbf{u}_{r\times 1}$ es un vector de efectos aleatorios con $\mathrm{cov}(\mathbf{u}) = \mathbf{G}$

Estimación por Máxima-Verosimilitud del modelo CAR-SAR DE EFECTOS MIXTOS

Recordemos las bases del modelo MEME:

$$\mathbf{y} = \rho \mathbf{W}_1 \mathbf{y} + \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \varepsilon, \qquad [1]$$

$$\varepsilon = \lambda \mathbf{W}_2 \varepsilon + u, \qquad u \sim NMV(0, \sigma_u^2 \mathbf{I}) \qquad [2]$$

Re-escribiendo [2]

$$\varepsilon - \lambda \mathbf{W}_2 \varepsilon = u, \qquad u \sim NMV(0, \sigma_u^2 \mathbf{I}) \qquad [3]$$

$$B\varepsilon = u, \qquad B = (I - \lambda \mathbf{W}_2)$$

$$\varepsilon = B^{-1} u$$

Sustituyendo [3] en [1] y reacomodando términos

$$A\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u} + B^{-1} u \qquad [4]$$

$$donde\ A = (I - \rho \mathbf{W}_1)$$

Premultiplicando por *B*:

$$BA\mathbf{y} = B\mathbf{X}\beta + B\mathbf{Z}\mathbf{u} + u \qquad [5]$$

Estimación por Máxima-Verosimilitud del modelo CAR-SAR DE EFECTOS MIXTOS

Continuando…

$$BA\mathbf{y} = B\mathbf{X}\beta + B\mathbf{Z}\mathbf{u} + u \qquad [5]$$

Notando en [5]

$$\mathbf{y}^* = BA\mathbf{y},$$

$$\mathbf{X}^* = B\mathbf{X},$$

$$\mathbf{Z}^* = B\mathbf{Z}, \qquad [6]$$

Llegamos al modelo Mixto tradicional !!!:

$$\boxed{\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\beta + \mathbf{Z}^*\mathbf{u} + u \qquad [7]}$$

Estimación por Máxima-Verosimilitud del modelo CAR-SAR DE EFECTOS MIXTOS

El modelo Mixto tradicional:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\beta + \mathbf{Z}^*\mathbf{u} + u \qquad u \sim NMV(0, \sigma_u^2\mathbf{I} = \mathbf{R}) \qquad [7]$$

Recordemos entonces que, a la luz de [7]:

$$u = \mathbf{y}^* - E(\mathbf{y}^* \mid \mathbf{u}) = \mathbf{y}^* - (\mathbf{X}^*\beta + \mathbf{Z}^*\mathbf{u})$$

$$E(\mathbf{y}^*) = E(\mathbf{X}^*\beta + \mathbf{Z}^*\mathbf{u} + \mathbf{e}) = \mathbf{X}^*\beta \qquad \textit{Esperanza incondicional}$$

$$E(\mathbf{y}^* \mid \mathbf{u}) = \mathbf{X}^*\beta + \mathbf{Z}^*\mathbf{u} \qquad \textit{Esperanza condicional}$$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{y}^*) = \mathbf{V} &= V(\mathbf{X}^*\beta + \mathbf{Z}^*\mathbf{u} + u) \\ &= \mathbf{Z}^* V(\mathbf{u})\mathbf{Z}^{*\prime} + V(u) \\ &= \mathbf{Z}^*\mathbf{G}\mathbf{Z}^{*\prime} + \mathbf{R}\ ,\ \mathbf{G} = \sigma_G^2 I \qquad [8] \end{aligned}$$

Máxima-Verosimilitud del modelo CAR-SAR DE EFECTOS MIXTOS: MEME

La función de verosimilitud toma la forma:

$$-2l_R(\theta;\mathbf{r}) = \log\left|\mathbf{V}(\theta)\right| + \log\left|\mathbf{X}^{*}{}'\mathbf{V}(\theta)\mathbf{X}^{*}\right| + \mathbf{r}'\mathbf{V}(\theta)^{-1}\mathbf{r} + c \qquad [8]$$

donde:

$$\theta = (\sigma_G^2, \sigma_u^2, \rho, \lambda)' \qquad [9]$$

$$\begin{aligned} V(\theta) &= \mathbf{V}(\mathbf{y}^{*}) \\ &= \sigma_G^2 \mathbf{Z}^{*}\mathbf{Z}^{*}{}' + \sigma_G^2 I \end{aligned} \qquad [10]$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}'\mathbf{y} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{A}'\mathbf{V}(\theta)\mathbf{A}) \qquad [11]$$

$\mathbf{A}$ es una transformación de los datos ortogonal a $\mathbf{X}^{*}$

Estimación por Máxima-Verosimilitud del modelo CAR-SAR DE EFECTOS MIXTOS

La función de verosimilitud toma la forma:

$$-2l_R(\theta;\mathbf{r}) = \log\left|\mathbf{V}(\theta)\right| + \log\left|\mathbf{X}'\mathbf{V}(\theta)\mathbf{X}\right| + \mathbf{r}'\mathbf{V}(\theta)^{-1}\mathbf{r} + c \qquad [8]$$

$$sujeto\ a\ |\rho| < 1 \ \ y\ |\lambda| < 1$$

Sustituyendo $\widehat{\theta}_{REML}$ en el estimador mínimo-cuadrático (generalizado) de β se obtiene el el estimador REML.
La estimación resultante del vector de efectos fijos es para nuestro problema:

$$\hat{\beta}_{REML} = (\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{V}(\hat{\theta}_{REML})^{-1}\mathbf{X}^{*})^{-}\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{V}(\hat{\theta}_{REML})^{-1}\mathbf{y}^{*} \qquad [12]$$

La función de verosimilutud restringida en R

```
MIXCARSAR.lik <- function(theta,y,X,Z)
  {
  kX <- ncol(X)
  kZ <- ncol(Z)

  S2G <- theta[1]
  S2U <- theta[2]
  rho   <- theta[3]
  Lambda<- theta[4]

  A <-(I-rho*W)
  B <-(I-Lambda*W)

  ys <- B%*%A%*%y
  Xs <- B%*%X
  Zs <- B%*%Z

  G <- S2G*diag(rep(1,kZ))
  Omega <- S2U*I

  ZGZ <- Zs%*%G%*%t(Zs)
  R <- Omega
  V <- ZGZ + R
```

```
logDetV <-determinant(V, logarithm=TRUE)
$modulus
  invV <- ginv(V)
  invXtX <- ginv(t(Xs)%*%Xs)
  r=(I-Xs%*%invXtX%*%t(Xs))%*%ys
  XVX <- t(Xs)%*%V%*%Xs
  logDetXVX <-
        determinant(XVX, logarithm=TRUE)$modulus

  LogL<-
        -logDetV-logDetXVX -t(r)%*%invV%*%r
  return(-LogL[1,1])

  }
```

La maximización de la función de verosimilutud restringida en R

```
optim(c(5,10,0.5,0.9),control = list(trace=TRUE, REPORT=2),
  method="L-BFGS-B ",lower=c(0,0,-1,-1),upper=c(10000,10000,1,1),
  MIXCARSAR.lik,y=Gab$YIELD,X=Xf,Z=Z)
```

CONCLUSIONES PRELIMINARES

1) MVReml prrueba hallar soluciones que tienen sentido desde el punto de vista de la aplicación y trabajos previos (Bongiovanni et al. 2002, Esposito, 2014)

2) MV probó hallar soluciones similares a MVReml, pero con tiempos de corrida 3 a 4 veces mayor que MVRReml

3) Imponiendo la restricción de que **u=0 y rho=0** el codigo R desarrollado (Robledo y Espósito, 2009) probó hallar las mismas soluciones que otros paquetes de R (spdep de Anselin), para estimar los parámetros de un modelo SAR convencional.

4) Los tiempos de procesamiento son una limitante seria si se amplia superficie del cultivo a analizar. Posible solución en desarrollo: procesamiento en paralelo (parallel computing)

Fin presentación

¡Gracias por su atención!