Economic Growth:

An R&D Model of Expanding Varieties

Agentes

- Productores de Bienes Finales
- Firmas encargadas de llevar a cabo el proceso de I&D para inventar nuevos productos (insumos intermedios)
- Consumidores

Productores de Bienes Finales:

$$Y = AL^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N}(X_j)^{\alpha}$$

Los productores se enfrentan a mercados competitivos de los factores y de los productos finales.

Las unidades de bienes finales pueden ser destinadas a consumo, producción de insumos intermedios, e invención de nuevos bienes intermedios (expansión de N)

Problema del productor de bienes finales:

- Max $$Y - wL - \sum_{j=1}^{N} P_j X_j$$
- Demanda del bien j: $$X_j = L\left(\frac{A\alpha}{P_j}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$
- $$w = (1-\alpha)\cdot\left(\frac{Y}{L}\right)$$

Firmas de I&D: enfrentan un proceso de decisión en dos etapas:

- Deciden si es conveniente dedicar recursos a la invención de un nuevo producto. Las firmas destinarán recursos a I&D si el valor presente neto de los beneficios futuros esperados es al menos tan grande como el gasto en I&D.

- Una vez que han realizado el esfuerzo en I&D, deciden a qué precio venderán el producto a los productores de bienes finales.

- Consideraremos un marco institucional en el cual el inventor de un bien intermedio retiene el monopolio perpetuo sobre la producción y venta del bien que ha inventado (patente perpetua).

- El valor presente neto de los retornos a la invención del bien j será:

$$V(t) = \int_t^{\infty} \pi_j(v) \cdot e^{-\int_t^v r(\omega)\,d\omega} dv$$

PASO 2: Determinación del precio del insumo una vez inventado

Asumiremos que, una vez inventados, el costo marginal del bien intermedio es constante y normalizado a 1. Entonces:

$$\pi_j(v) = \lfloor P_j(v) - 1 \rfloor \cdot X_j(v)$$

y tomaremos la función de demanda para el productor de bienes finales,

$$X_j(v) = L \cdot \left(\frac{A\alpha}{P_j(v)} \right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

Para determinar el precio final el productor de I&D resolverá:

$$\max_{P_j(v)} \pi_j(v) = \left[P_j(v) - 1\right] \cdot L \cdot \left(\frac{A\alpha}{P_j(v)}\right)^{\frac{1}{(1-\alpha)}}$$

Resolviendo, se llega a:

$$P_j(v) = P = \frac{1}{\alpha} > 1$$

El precio es mayor que el costo marginal (resultado del monopolio en la producción y comercialización)

El precio es el mismo para todos los bienes intermedios $\Rightarrow$ todos los bienes intermedios entran simétricamente en la función de producción de bienes finales

$$Y = AL^{1-\alpha}\sum_{j=1}^{N}(X_j)^{\alpha} = AL^{1-\alpha}NX_j^{\alpha}$$

$$X_j = A^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}} L$$

$$\Downarrow$$

$$Y = AL^{1-\alpha} X_j^{\alpha} N = A^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \alpha^{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)}} LN$$

Mediante un par de sustituciones, llegamos a la función de beneficios:

$$\pi_j(v) = \pi = LA^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}$$

Y finalmente a la función de valor presente neto de los beneficios del inventor en el momento *t*

$$V(t) = LA^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}} \cdot \int_t^{\infty} e^{-\int_t^v r(\omega)d\omega} dv$$

PASO 1: La decisión de entrar en el negocio de I&D

- El costo de I&D es fijo e igual a η
- Condición de libre entrada (free-entry condition):

$$V(t) = \eta$$

- Diferenciando la condición de libre entrada con respecto al tiempo obtenemos:

$$r(t) = \frac{\pi}{V(t)} + \frac{\dot{V}(t)}{V(t)}$$

- La condición de libre entrada implica $\dot{V}(t) = 0$

$$r(t) = r = \frac{\pi}{\eta} = \frac{L}{\eta} \cdot A^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right) \cdot \alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}$$

- $V(t) = \eta$ implica que η es el valor de mercado de una firma que posee los derechos para producir un bien intermedio. El valor de mercado agregado para todas las firmas de I&D será ηN

Problema de las familias:

- Las familias maximizan su utilidad sobre un horizonte temporal infinito:

$$U = \int_0^{\infty} \left(\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \cdot e^{-\rho t} dt$$

La restricción presupuestaria agregada de las familias es:

$$\dot{a} = wL + r \cdot a - C$$

- El Hamiltoniano de este problema será:

$$H = \left(\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \cdot e^{-\rho t} + \lambda(t)(w + r \cdot a - c)$$

- De las condiciones de primer orden se desprende la ecuación de Euler:

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{1}{\theta} \cdot (r - \rho)$$

Equilibrio General

$$r=\frac{L}{\eta}\cdot A^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\cdot\alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}$$

$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{L}{\eta}\cdot A^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\cdot\alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}-\rho\right]$$

El problema del Planificador Social

max $$U = \int_0^\infty \left(\frac{c^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \right) \cdot e^{-\rho t} dt$$

sujeto a

$$Y = AL^{1-\alpha} N^{1-\alpha} X^{\alpha} = C + \eta \dot{N} + X$$

$$H=\left(\frac{c^{1-\theta}-1}{1-\theta}\right)\cdot e^{-\rho t}+\lambda(t)\cdot\frac{1}{\eta}\left(AL^{1-\alpha}N^{1-\alpha}X^{\alpha}+Lc-X\right)$$

De la solución del Hamiltoniano se desprende:

$$\left(\frac{\dot{c}}{c}\right)^{SP}=\frac{1}{\theta}\cdot\left[\frac{L}{\eta}\cdot A^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\cdot\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\cdot\alpha^{\frac{1}{(1-\alpha)}}-\rho\right]$$

$$X^{SP}=A^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\alpha^{\frac{1}{(1-\alpha)}}LN \qquad Y^{SP}=A^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\alpha^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}LN$$

Comparación de los resultados de la economía descentralizada y del planificador social

$$r^{SP} = \frac{L}{\eta} \cdot A^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \quad >$$

$$r^{MK} = \frac{L}{\eta} \cdot A^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \cdot \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \cdot \alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\&}{c}\right)^{SP} > \left(\frac{\&}{c}\right)^{MK}$$

Comparación de los resultados de la economía descentralizada y del planificador social

$$X^{SP} = A^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\alpha^{\frac{1}{(1-\alpha)}}LN \quad > \quad X^{MK} = A^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\alpha^{\frac{2}{(1-\alpha)}}LN$$

$$Y^{SP} = A^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\alpha^{\frac{\alpha}{(1-\alpha)}}LN \quad > \quad Y^{MK} = A^{\frac{1}{(1-\alpha)}}\alpha^{\frac{2\alpha}{(1-\alpha)}}LN$$

Posibles soluciones para alcanzar el óptimo social

- Subsidios a las compras de bienes intermedios
- Subsidios a la producción de bienes finales
- Subsidios a la investigación