Avances Recientes en Regresion por Cuantiles

Walter Sosa Escudero

(wsosa@udesa.edu.ar)

Universidad de San Andres

Noviembre de 2007
Universidad Nacional de Cordoba

Outline

Una digresion

Quantile regression:

- ¿Regresion cuantil?
- ¿Regresion cuantilica?
- ¿Retroceso del quantile? (Algoritmo no convergente)

quantile regression = regresion por cuantiles

Esperanzas condicionales y regresion

Consideremos un modelo lineal simple:

$$y = x'\beta + u$$

con $E(u|x) = 0$. De modo que:

$$E(y|x) = x'\beta$$

$x'\beta$ es una *funcion de regresion*, es la esperanza condicional de y en x.

Trivialmente:

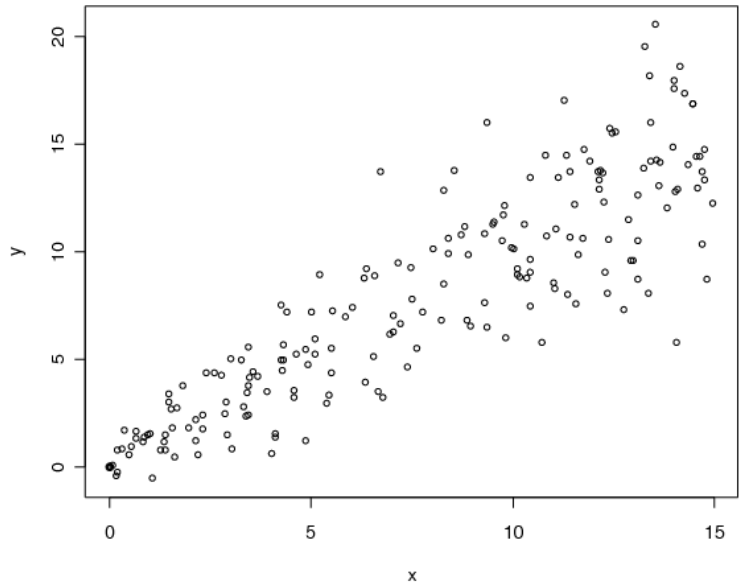
$$\frac{\partial E(y|x)}{\partial x_k} = \beta_k$$

β mide como cambios marginales en x afectan a $E(y|x)$.
Si u es independiente de x, tambien es cierto que:

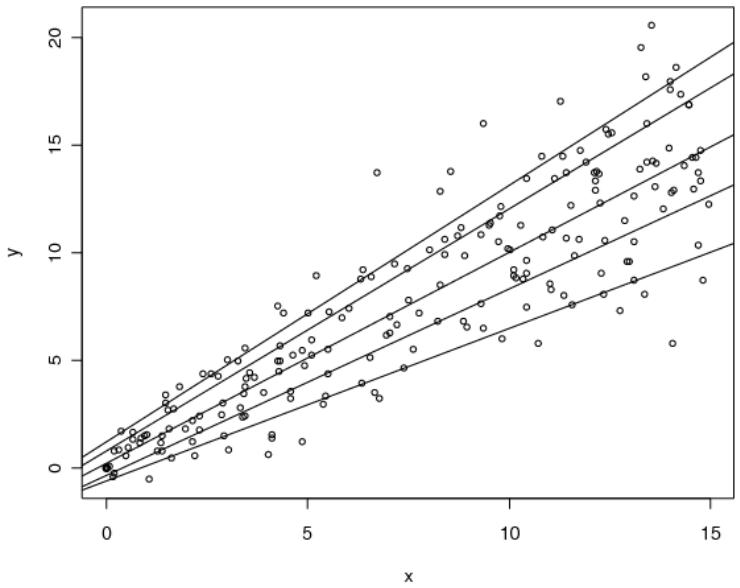
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \beta$$

- La independencia es lo que le da sentido a la idea de 'alterar x dejando u constante'.
- El efecto de x sobre $E(y|x)$ resume tambien el efecto de x sobre y.

Consideremos el siguiente caso de *heterocedasticidad*:

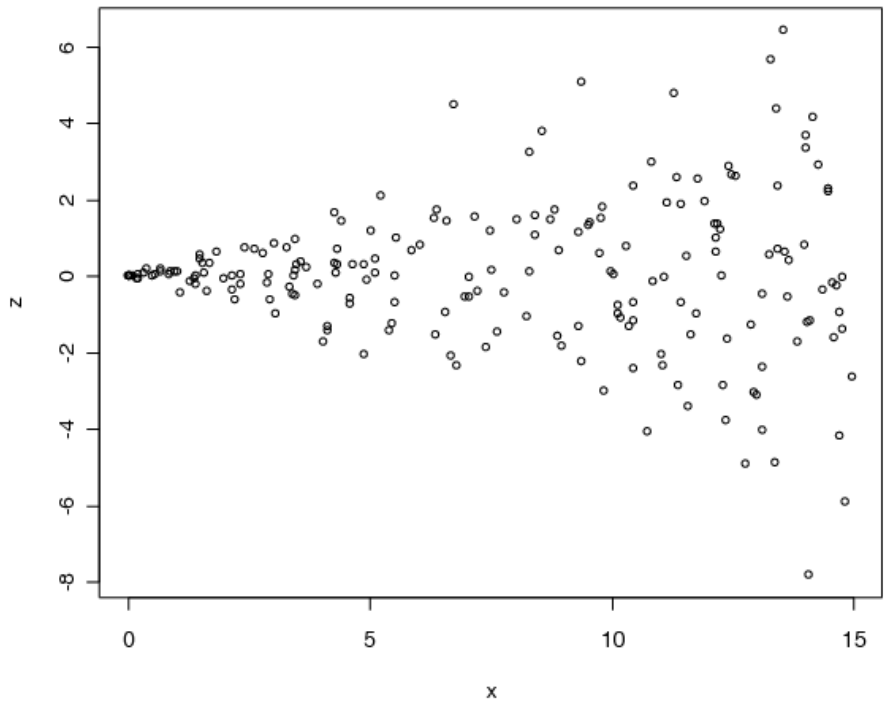


- ¿Cual es el efecto de x sobre $E(y|x)$?
- ¿Cual es el efecto de x sobre y?



- El efecto de x es mayor 'arriba'. El efecto no es *homogeneo*.
- $\beta = \partial E(y|x)/\partial x$ *no* resume el ejemplo de x sobre y.

- ¿Es posible que x no afecte a $E(y|x)$ pero que si a y?



x no afecta a $E(y|x)$ pero si afecta a y.

Regresion por cuantiles

Intenta modelar el efecto de x sobre toda la distribucion de y.

Cuantiles condicionales y quantile regression

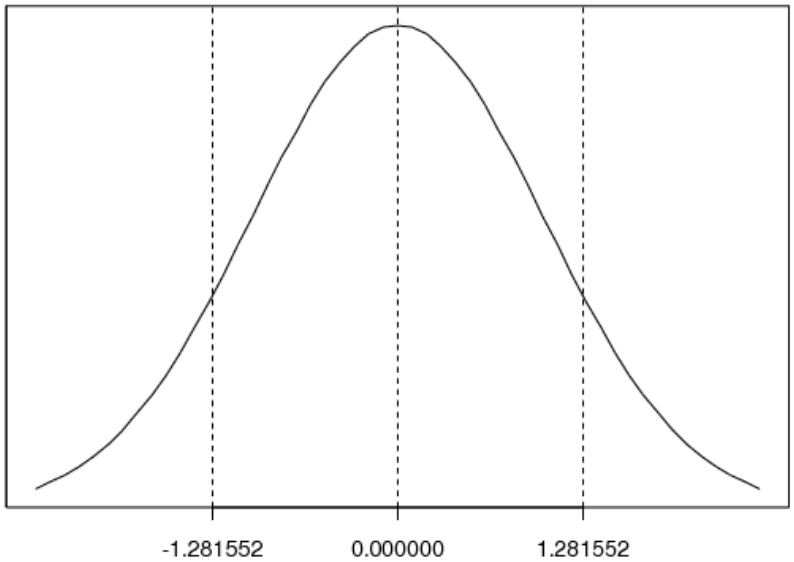
$Z \sim F(z)$ continua y monotona.

El τ-esimo cuantil de Z es un numero $Q_Z(\tau)$ que satisface:

$$F(Q_Z(\tau)) = \tau$$

o sea, el τ-esimo cuantil es un numero del soporte de la distribucion tal que la probabilidad de que ocurran valores menores es τ.

Cuantiles de la distribucion normal estandar



Recordar que el modelo simple de regresion puede ser visto como

$$E(y|x) = x'\beta$$

En forma analoga, el modelo de regresion para el τ-esimo cuantil de la distribucion de y condicional en x sera:

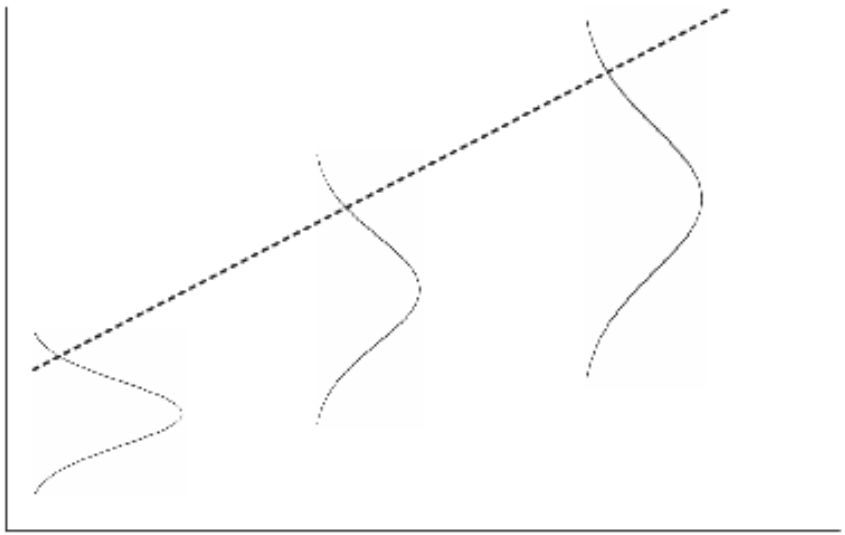
$$Q_{y|x}(\tau) = x'\beta(\tau)$$

Con :

$$\frac{\partial Q_{y|x}(\tau)}{\partial x} = \beta(\tau)$$

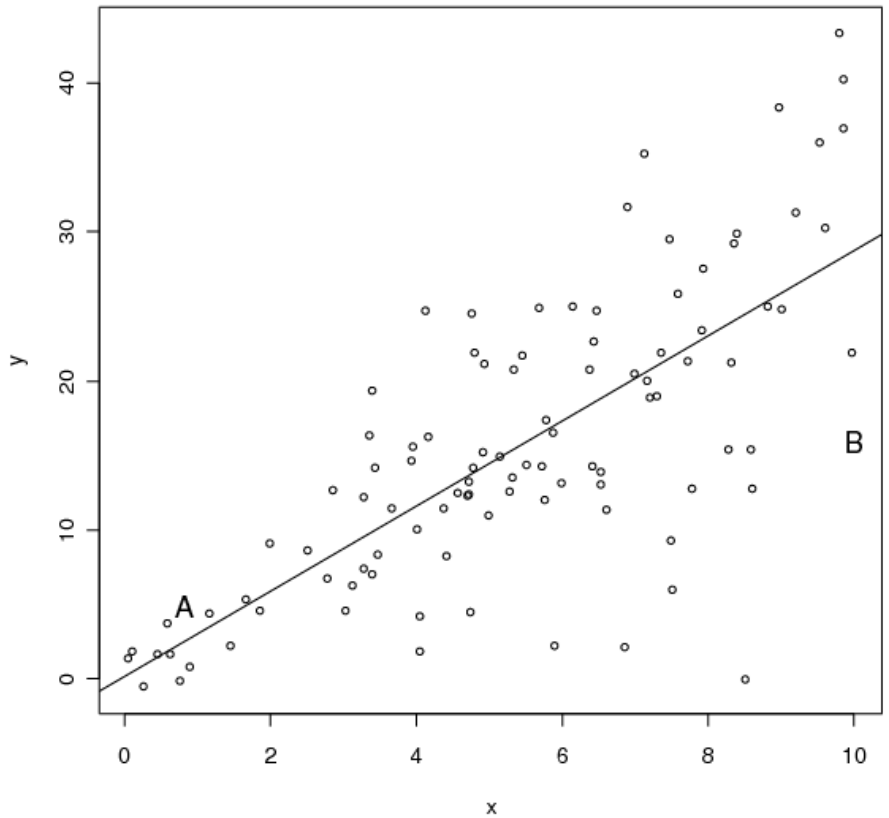
Estamos permitiendo que el efecto de x sobre y sea distinto en distintos lugares de la distribucion de y dado x

Ejemplo: $Q_{y|x}(0.75) = \beta_0(0.75) + \beta_1(0.75)\, x$



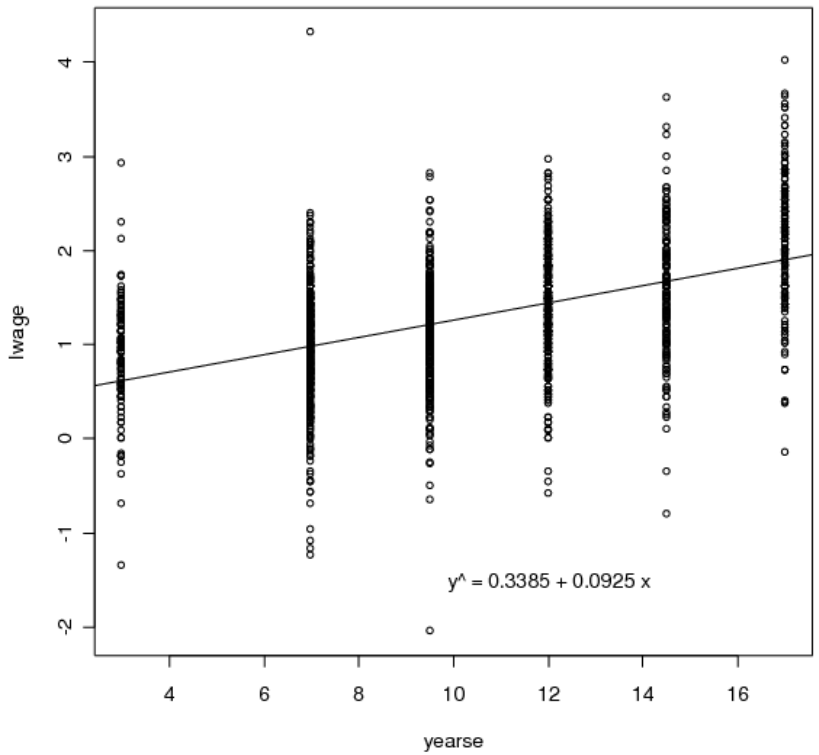
La recta une los cuantiles 0.75 de cada distribucion *condicional.*

Importante: el metodo estima rectas para distintos lugares de la distribucion *condicional* (y no de la no condicional!!!!)



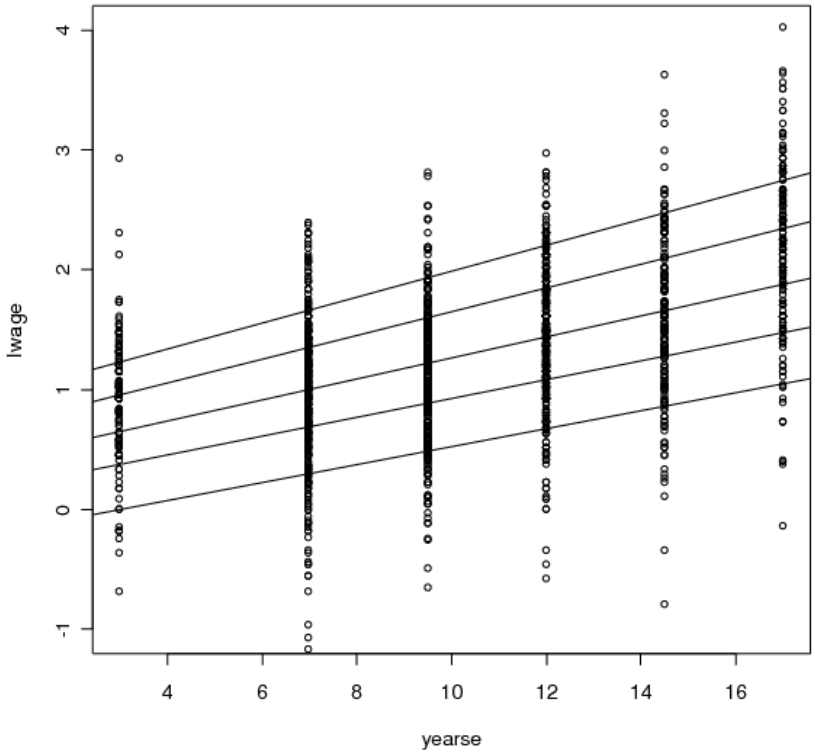
- 'A' esta arriba de la distibucion condicional y abajo en la no condicional.
- 'B' esta en el medio de la no condicional, y muy abajo en la condicional.

Ejemplo: Retornos a la Educacion



- El retorno 'medio' es 0.0925.

Estimacion por quantile regression:

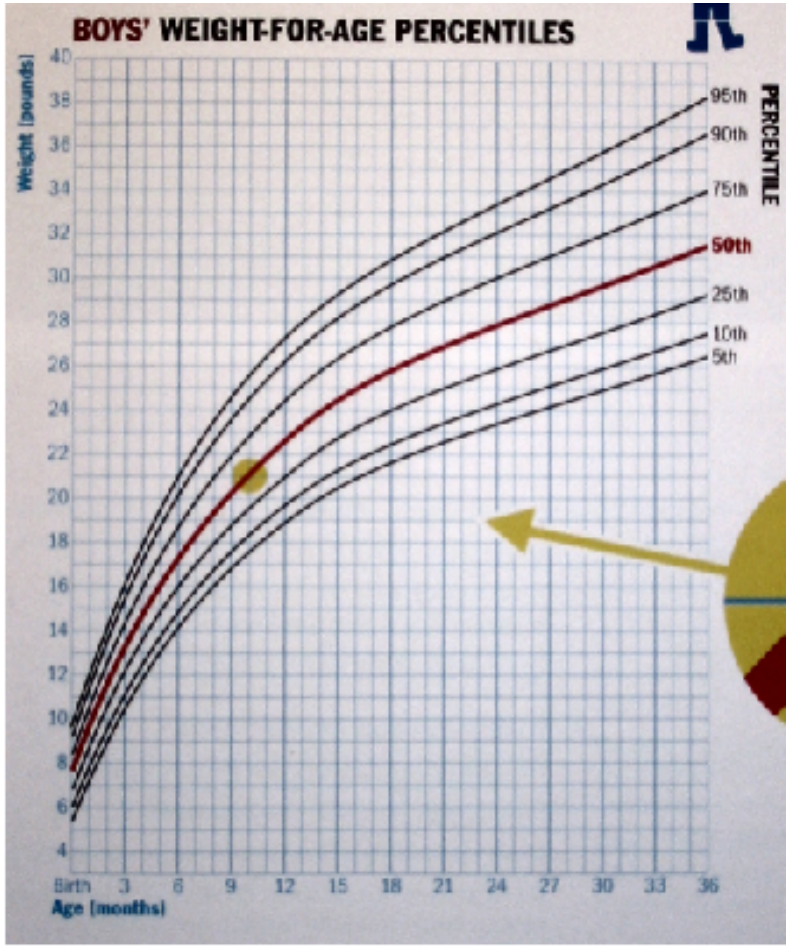


- El retorno es superior en los niveles mas altos.

Resumen de resultados:

Cuantiles	intercepto	educacion
0.10	-0.2260	0.0753
0.25	0.1420	0.0787
0.50	0.3841	0.0881
0.75	0.6580	0.0992
0.90	0.9055	0.1083
Retorno medio (MCO)	0.3385	0.0925

Ejemplo: Growth-Size Charts



Ejemplo: Factores Limitantes en Ecologia

Cade, B., Terrell, J. y Schroeder, R., 1999, Estimating the effects of limiting factors with regression quantiles, *Ecology*, 80(1), 311/323.

- Factor limitante: 'menos disponible entre los que afectan al crecimiento, supervivencia y reproduccion...'
- Ley de Liebig 'del minimo'
- Efecto de factores: no separable. Interacciones.
- Problema: como medir el efecto de un factor cuando es el unico limitante.

- Caso: 43 parcelas de 0.2 Ha (1989-1993) en Missouri (EEUU)
- y : 'produccion' de bellotas en un bosque de robles. (Densidad o biomasa).
- x : 'forest suitability index' (porcentaje de cobertura, numero de especies, etc.).
- (y, x) muy similar al caso de educacion.
- CTS: en el 'medio' estan los casos en donde hay factors no observables (clima?) que actuan como limitantes.
- El verdadero efecto de x esta mejor medido 'arriba' de la distribucion.

$y =$ densidad, $x =$ calidad del bosque, $u =$ no observables (clima?)

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \delta g(x) u$$

$g(.)$ es una funcion arbitraria, introduce una interaccion entre x y u.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \beta_1 + \delta u$$

si $\delta > 0$ el efecto de x sobre y es mayor cuanto mayor es u.

Los metodos de regresion por cuantiles permite modelar el efecto de estas interacciones sin hacer supuestos sobre la forma en la que x y u interactuan.

Estimacion

Minimos cuadrados ordinarios: argmin $\sum(y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2$

- La solucion es una recta en (X, Y).
- La recta pasa 'por el medio' (los errores son penalizados en forma simetrica)

Minimos desvios absolutos: argmin $\sum |y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i|$

- La solucion es una recta en (X, Y).
- La recta pasa 'por el medio' (los errores son penalizados en forma simetrica)

Koenker y Bassett (1978): la solucion al problema pasa por penalizar asimetricamente los errores de estimacion.

$$\hat{\beta}(\tau) = \text{argmin} \sum_{i=1}^{n} \rho_\tau(y_i - x_i'\beta)$$

con $\rho_\tau(z) \equiv z\,(\tau - I(z < 0)), \quad \tau \in (0,1)$, produce estimadores consistentes y asintoticamente normales.

- Penaliza a los errores positivos con τ y a los negativos con $1 - \tau$
- Cuando $\tau = 0.5$, minimos desvios absolutos, penalizacion simetrica

Cuestiones computacionales

El problema de estimacion puede ser reescrito como:

$$\min_{(b(\tau),u,v)\in \Re\times\Re_+^{2n}} \{\tau 1_n' u + (1-\tau)1_n' v \mid 1_n' b(\tau) + u - v = y\}$$

$e_i \equiv x_i' b(\tau)$, 1_n un vector columna de n, u y v son variables de holgura complementaria: es un programa lineal.

En la practica estimamos $\hat{\beta}(\tau_i), i = 1, \ldots, m$ (coeficientes para m cuantiles)

Denominemos con $\beta(\tau_i)$ a los coeficientes poblacionales y construyamos los siguientes vectores.

- $\hat{\beta} \equiv (\hat{\beta}(\tau_1)' \cdots \hat{\beta}(\tau_m)')'$
- $\beta \equiv (\beta(\tau_1)' \cdots \beta(\tau_m)')'$

Inferencia

Bajo el supuesto de que la muestra es independiente (pero no necesariamente identicamente distribuida) y bajo condiciones de regularidad estandar, es posible mostrar que:

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(0, \Lambda)$$

$\Lambda = \Lambda_{j,p}$, $j = 1, \ldots, m$, $\quad p = 1, \ldots, m$ con:

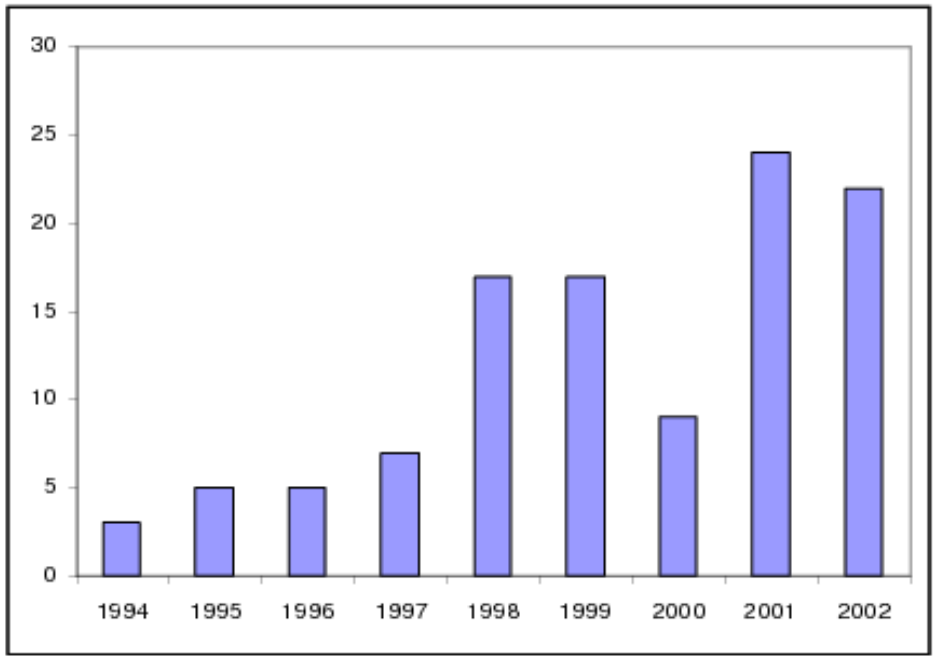
$$\Lambda_{j,p} = (\min\{\tau_j, \tau_p\} - \tau_j \tau_p) \left(E[f_{\tau_j}(0|x)\, xx'] \right)^{-1} E[xx'] \left(E[f_{\tau_j}(0|x)\, xx'] \right)^{-1}$$

en donde $f_{\tau_s}(0|x)$ es la funcion de densidad de y condicional en $x'\beta(\tau_s)$.

Alternativas:

- Estimar Λ, pasa por estimar $f_{\tau_s}(0|x)^{-1}$ (*sparsity*) no parametricamente.
- Metodo de inversion de test de rangos (Koenker, 1994).
- Bootstrap (Buchinksky, 1998)

Evolucion de la literatura



Fuente: Econlit

Teoria

Seminal paper: Koenker y Bassett (1978, Econometrica)

- Datos censurados: Powell (1986, JoE), Portnoy (2003, JASA).
- Selectividad: Buchinsky (2001, EE)
- Regresion no-lineal: Koenker y D'Orey (94, JoE), Lee (2003, ET).
- Datos en paneles: Koenker (2004), Lamarche (2004).
- Modelos binarios: Kordas (2003), Belluzo (2004, JBES).

- Endogeneidad y variables instrumentales: Abadie, Angrist e Imbens (2002, Econometrica), Arias, Hallock y Sosa Escudero (EE, 2001).
- Raices unitarias y series temporales (Hassan y Koenker, 2000, Econometrica)
- Algoritmos: Fitzenberger (2001, JoE), Bilias et al (2000, JoE).
- Modelos de duracion: Koenker y Goesling (2003, JASA).
- Modelos mal especificados (Angrist et al (2004), Kim y White (2002))

Aplicaciones

Seminal papers: Buchinsky (1994), Chamberlain (1994), ecuaciones de Mincer.

- Ecuaciones de Mincer (Buchinsky, 94, 98).
- Frontera estocastica: Bernini, et al. (2004), EE.
- Modelos de crecimiento: Canarella y Pollard (2004, JDE).
- Brecha de generos: Garcia et al. (2001)
- Asimetria y volatilidad en finanzas: Park (2002, EcJ), Bassett et al. (2002)
- Tamaño de firmas al inicio: Machado y Mata (2000, JAE).
- Efecto del tamaño de clase: Levin (2001)

- Demanda de alcohol: Manning (1995)
- Descomposicion de desigualdad: Martins y Pereira (LabEc, 2004), Machado y Mata (JAE, 2004)
- CAVIAR (conditional value at risk): Engle y Manganelli (2000).
- Pobreza: Arias y Sosa Escudero (2004).
- Willingness to pay: Belluzo (2004, JBES).
- Imputacion de rentas (Gasparini y Sosa Escudero, 2005, JIncDist).
- Brecha publico-privado (Mueller (98), Poterba y Reuben (1995).

Libros y articulos generales

Articulos generales:

- Koenker (2000, JoE): nota historica
- Koenker y Hallock (2001,JEPersp): Articulo general
- Buchinsky (1998, JHR): Articulo general.
- Cade y Noon (2003, FrontEcology): Introduccion en ecologia.

Textos:

- Machado, Koenker y Fitzenberger (2001): *Economic Applications of Quantile Regression*, Springer-Verlag, texto de aplicaciones.
- Koenker, R. (2005): *Quantile Regression*, Cambridge University Press.

Software

- Splus y R
- Stata