

Gráficos de control multivariados para procesos de atributos de alta calidad

JOEKES, S. ⁽¹⁾; RIGHETTI, A. ⁽¹⁾ ; SMREKAR, M. ⁽²⁾

(1) Instituto de Estadística y Demografía – Facultad de Ciencias Económicas – UNC

(2) Lab. de Ingeniería y Mant. Industrial–Fac. de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales - UNC

Introducción

- ✓ Los procesos actuales, fruto de la evolución tecnológica, son procesos que se caracterizan por presentar una cantidad muy baja de unidades no conformes.
- ✓ Los procedimientos tradicionales de control ya no pueden ser empleados debido a que incrementan de manera significativa el riesgo de falsas alarmas.
- ✓ Esta situación motiva la necesidad de desarrollar una serie de alternativas más potentes que las clásicas para el control de procesos de atributos de alta calidad.
- ✓ Una alternativa implica el monitoreo simultáneo de múltiples atributos lo que conduce a la aplicación de **métodos de control de calidad multivariados** que han mostrado ser más adecuados que el uso simultáneo de múltiples procedimientos univariados

Introducción

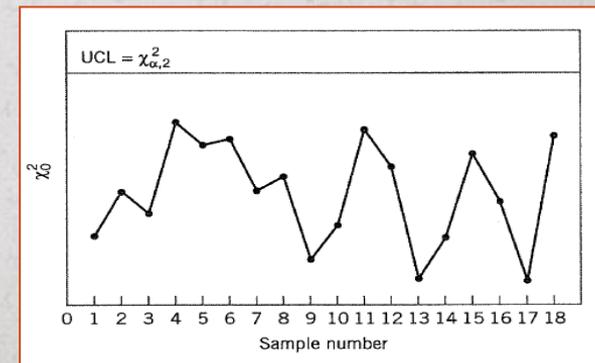
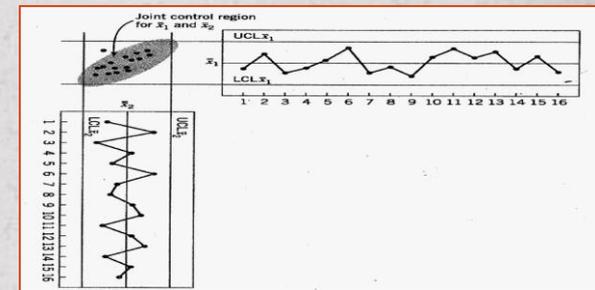
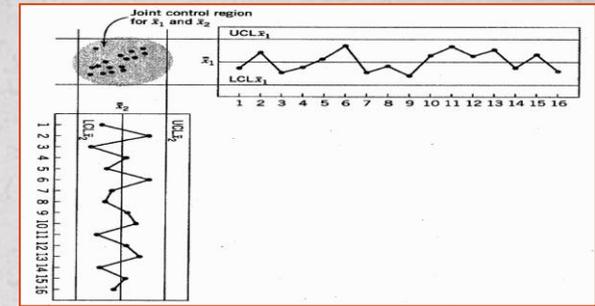
- ✓ Los gráficos de control de Shewhart fueron empleados durante mucho tiempo para descubrir la existencia de causas asignables y cambios en los procesos. Estos gráficos consideran sólo el monitoreo de una característica de calidad por vez.
- ✓ Sin embargo, muchas veces la calidad de un producto o servicio depende de más de un atributo de calidad. En casos como este, la práctica habitual consistía en aplicar un gráfico de control univariado para cada una de ellas.
- ✓ Hoy en día se conoce que esta práctica puede dar resultados engañosos en términos del error tipo I o de las señales de falsa alarma, especialmente cuando las características bajo estudio están altamente correlacionadas.
- ✓ Como resultado, se hace necesario utilizar un procedimiento de control multivariado que tenga en cuenta la estructura de correlación entre los datos.

Introducción

- ✓ Algunos investigadores han considerado métodos de inspección para procesos multiatributos binomiales o multinomiales, tales como los gráficos np multivariados (Mnp), los gráficos tipo chi-cuadrado (χ^2), los gráficos p generalizados y los gráficos tipo T² de Hotelling, entre otros.
- ✓ Sin embargo estos procedimientos han sido desarrollados para el caso de muestras grandes y proporción de unidades no conformes no muy baja.
- ✓ En los procesos multi-atributos de **alta calidad** debido a que la proporción de unidades no conformes es muy baja, se hace complejo lograr la simetría de las distribuciones marginales.
- ✓ Esta problemática ha dado origen a diferentes procedimientos de control.

T² de Hotelling

- ✓ El procedimiento de monitoreo y control de procesos con variables múltiples más conocido es el gráfico de control T² de Hotelling para monitorear el vector de medias de un proceso.
- ✓ T² tiene distribución aproximada Chi-cuadrado con p grados de libertad.
- ✓ El LSC del gráfico es igual al cuantil superior de la distribución y el LIC es igual a cero.
- ✓ Si las medias del proceso se mantienen en los valores dados por los parámetros, los valores de Chi-cuadrado deberían mantenerse por debajo del límite superior de control; $LSC = \chi^2_{0,p}$
- ✓ Si al menos una de las medias se corre a un nuevo valor, entonces se incrementa la probabilidad de que el estadístico exceda el límite de control superior.



EL PROCEDIMIENTO

El control multivariado de procesos necesita capturar la relación en las variables asociadas al proceso, si se ignora esta correlación y se utilizan gráficos de control univariados para cada variable por separado se puede concluir erróneamente acerca del estado del proceso.

- ❖ Hay que generar un gráfico que preserve la secuencia en el tiempo de los puntos graficados.
- ❖ Para ello, se define una estadística adecuada que se calcula para cada muestra y se grafica en un gráfico de control.
- ❖ De esta manera es posible investigar corridas y otros patrones no aleatorios.
- ❖ Además, presenta la ventaja adicional de que el "estado" del proceso se caracteriza con un sólo número (el valor del estadístico).
- ❖ Esto resulta particularmente útil cuando hay interés en dos o más características de calidad.

Gráficos multi-atributos

De manera similar a los gráficos de control multivariados para monitorear características variables, los gráficos muti-atributos han sido desarrollados para monitorear simultáneamente varias características de atributos.

Usualmente los datos tienen distribución binomial, Poisson o geométrica y los supuestos de normalidad causan dos problemas:

- ✓ El primero y más importante es el hecho de que estas distribuciones son asimétricas.
- ✓ El segundo está relacionado con la naturaleza discreta de estas distribuciones.

Distintos investigadores han propuesto diferentes soluciones.

Revisión de la literatura

Entre las primeras referencias sobre gráficos de control para procesos binomiales o multinomiales y multiatributos se encuentran los trabajos de:

- ✓ Patel (1973), sugirió un gráfico tipo T^2 de Hotelling para observaciones de distribuciones multivariadas binomiales o Poissonianas, bajo el supuesto de muestras grandes.
- ✓ Marcucci (1985), desarrolló un gráfico p generalizado, para procesos multinomiales, usando dos procedimientos, uno basado en la distribución X^2 y otro en la multinomial.
- ✓ Lu et al. (1998), desarrollaron el diagrama Mnp , que consideran la correlación entre los atributos . Aplica gráficos de Shewhart.
- ✓ Jolayemi (2002) desarrolló un grafico de control multiatributo llamado MACC, como una extensión de los gráficos np .
- ✓ Gadre y Rattihalli (2008) desarrollaron el " exact multi-attribute control chart" (E-MACC)" usando un "MP-test" (Most Powerful Test) que permite detectar cambios en los parámetros de la distribución.

Revisión de la literatura

Entre las referencias sobre gráficos de control para procesos multinomiales y multiatributos de **alta calidad** se encuentran los trabajos de:

- ✓ Niaki y Abassi (2005) propusieron eliminar la asimetría de las distribuciones marginales y luego estimar el vector medio y la matriz de covarianza de los atributos transformados utilizados el diagrama de control χ^2 .
- ✓ Posteriormente (2007) con los datos transformados obtuvieron el vector de medias y la matriz de covarianzas para así aplicar un gráfico de control χ^2 (NORTRA transformación inversa).
- ✓ Cozzucoli (2009), desarrolló un índice normalizado para evaluar la no conformidad y un gráfico tipo Shewhart bilateral.
- ✓ En el año 2014, Niaki et al. propusieron un estimador máximo verosímil para estimar el punto de cambio en el vector de parámetros y lo aplicaron a los gráficos T^2 y MEWMA.
- ✓ Li et al. (2014), propusieron un gráfico de control basado en los modelos log-lineales, que es robusto para detectar desplazamientos especialmente los efectos de la interacción que representan la dependencia entre las variables de atributo.

Trabajos más recientes

Entre las referencias más recientes (no específicamente para alta calidad) se pueden citar las siguientes:

- ✓ Ramirez y Cantú (2016), estudiaron el desempeño de la carta de control D^2 para variables discretas y el efecto que tiene el tamaño de muestra. Además, obtuvieron diseños óptimos de la carta.
- ✓ He et al. (2016), propusieron un gráfico de control para datos binomiales bivariados correlacionados empleando el log. de verosimilitud.
- ✓ Niavarani (2014), desarrollaron un modelo para datos multiatributo utilizando gráficos de control univariados, incluyendo gráficos de Shewhart, MCUSUM y MEWMA, mediante transformaciones para reducir asimetría y correlación.
- ✓ Doroudyan y Amiri (2013) usaron los métodos de transformación para reducir la asimetría y correlación, mediante gráficos T^2 y MEWMA combinando atributos y variables.
- ✓ Haridy et al (2012, 2013), propusieron un gráfico χ^2 y un gráfico sintético multiatributo (MSyn) y los compararon con el gráfico Mnp.

El desarrollo de gráficos de control multiatributo se ha focalizado además en: Redes Neuronales, Teoría Difusa, Gráficos MEWMA, MCUSUM y métodos bayesianos, entre otros.

Aplicaciones de los Gráficos de Control Multi-atributo

Los gráficos multi-atributos tienen aplicaciones en diferentes áreas. Algunos ejemplos se indican a continuación:

Salud: En monitoreo de recuento de colonias, en procedimientos quirúrgicos, de radiación, en procedimientos diagnósticos de angiografía coronaria, en ensayos clínicos aleatorizados, para evaluar el desempeño de analistas en laboratorios microbiológicos, etc.

Industria En la vigilancia de sensores de semiconductores; en el proceso de soldado de alambre en circuitos integrados; en la inspección de la apariencia visual de productos; en el uso de puntuaciones de calidad o deméritos; en la calidad de alimentos, en el número de puntos de fuga en la costura lateral o en los paneles inferiores de latas de jugo. En la industria de elaboración de porcelana se controlan tres características de calidad de manera conjunta: apariencia, translucidez y blancura. En industria aeroespacial, nuclear y química.

Servicios: Los bancos registran si sus clientes utilizan o no cada servicios. En encuestas de satisfacción de clientes. En los centros de atención telefónica se registran los errores que cometen los miembros del personal de la información brindada y las soluciones proporcionadas.

Presentación

En este trabajo presentaremos los procesos de atributos multivariados mediante la aplicación de dos procedimientos más una metodología para identificar la variable/s responsables de la salida de control.

- ❖ Gráficos de control Mnp que utilizan como variable a graficar a la suma ponderada de los conteos de unidades no conformes de cada característica de calidad en la muestra.
- ❖ Gráficos de control que utilizan a la distribución multinomial como modelo de probabilidad para el monitoreo de múltiples características de calidad.
- ❖ Estadística score para detectar causas asignables cuando aparece una señal de fuera de control

Gráfico np multivariado (Mnp) con promedios ponderados.

En el caso de procesos de atributos multivariado, el conteo de unidades no conformes sobre cada característica de calidad sigue una distribución binomial o multinomial.

El Gráfico Mnp

Se define la estadística X como la suma ponderada de unidades no conformes de todas las características de calidad en la muestra.

$$X = \sum_{i=1}^m c_i / \sqrt{p_i}$$

Con m características de calidad, p_i probabilidad de que un ítem sea no conforme respecto a la característica de calidad i y c_i es el conteo de unidades no conformes con respecto a la característica de calidad i en la muestra.

Cuanto menor es la fracción de no conformes mayor es la contribución del conteo a la estadística del proceso de atributos multivariado.

$$p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$$

Límites de control

Asumiendo que el vector de fracciones de no conformidades y la matriz de coeficientes de correlación de un proceso de atributos multivariado son conocidos o han sido estimados, los límites de control del gráfico Mnp tipo Shewhart, son:

$$LSC = n \sum_{i=1}^m \sqrt{\bar{p}_i} + 3 \sigma_m, \quad LIC = n \sum_{i=1}^m \sqrt{\bar{p}_i} - 3 \sigma_m$$

$$\sigma_m = \sqrt{n \left\{ \sum_{i=1}^m (1 - \bar{p}_i) + 2 \sum_{i < j} \bar{\delta}_{ij} \sqrt{(1 - \bar{p}_i)(1 - \bar{p}_j)} \right\}}$$

Estos límites son límites de prueba que permiten establecer si el proceso está bajo control estadístico cuando se han tomado k muestras iniciales (Fase I).

Caso de aplicación

En esta sección, se aplica la metodología propuesta a un fabricante de **condensadores electrolíticos de aluminio** (AEC). El proceso incluye una serie de etapas. Después de cada etapa, se determina la calidad de los capacitores en función de sus condiciones de apariencia y rendimiento funcional mediante inspección por muestreo con el fin de cumplir con las especificaciones.

Aquí, consideramos la calidad en la etapa final, donde el monitoreo se concentra en tres características: **capacidad** (CAP), **factor de disipación** (DF) y **corriente de fuga** (LC). Cada característica puede ser evaluada como conforme o no conforme respecto a su especificación mediante un dispositivo electrónico de muy alta velocidad.

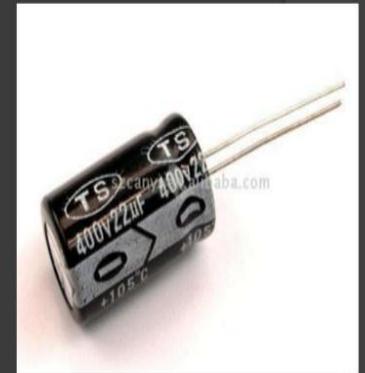
Es posible obtener sus valores numéricos precisos, pero esto costará demasiado.

Este proceso puede considerarse como un proceso binomial multivariado con tres variables cada una a dos niveles.

Tipos de capacitores.

Capacitor de aluminio.

este capacitor está formado por una especie de barril de aluminio y su dieléctrico es una mezcla de ácido bórico, este capacitor tiene un gran funcionamiento cuando se manejan bajas frecuencias pero cuando está en frecuencias mediana o altas, este tipo de capacitor tiende a tener grandes pérdidas de frecuencia, es utilizado en fuente de alimentación (en especial las conmutativas) y equipos de audio.



Datos

Nº	Muestra	CAP	DF	LC	Estadístico
1	1000	1	2	0	61,13
2	1000	0	8	5	217,26
3	1000	0	8	3	174,23
4	1000	2	8	2	220,13
5	1000	0	2	1	48,94
6	1000	0	5	1	90,07
7	1000	1	4	2	131,58
8	1000	0	8	5	217,26
9	1000	0	8	1	131,20
10	1000	2	4	4	208,33

Distribución normal del estadístico $p < 0,3249$

Parámetros estimados

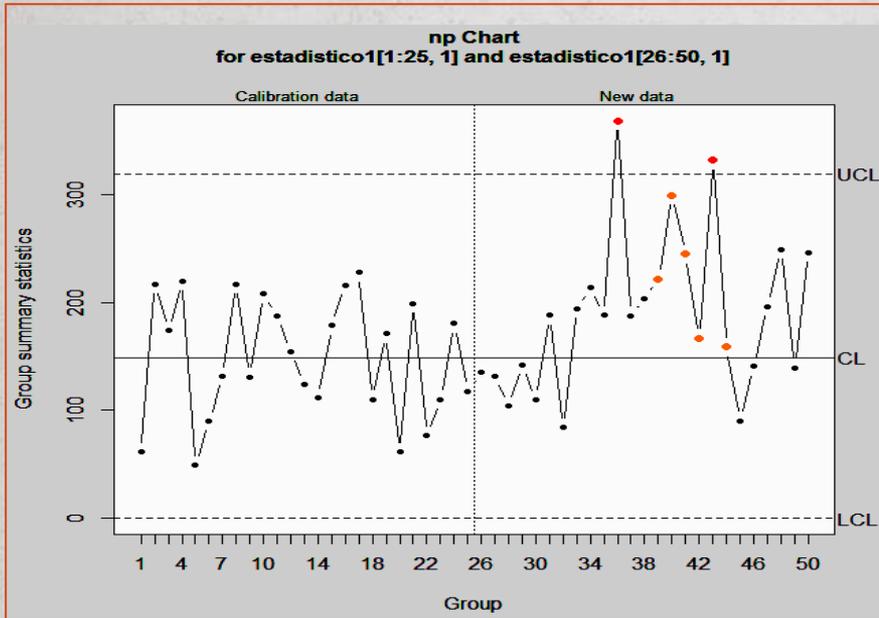
Variable	Estimación
CAP	0,00088
DF	0,00532
LC	0,00216

Matriz de varianza y covarianza

	CAP	DF	LC
CAP	1.0000000	-0.2110230	-0.0161876
DF	-0.2110230	1.0000000	0.3502721
LC	-0.0161876	0.3502721	1.0000000

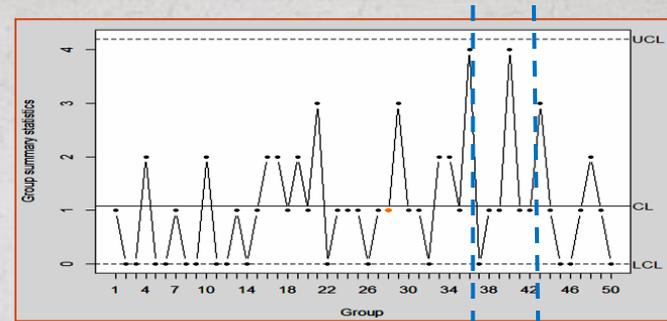
Gráficos Individuales

Gráfico Multivariado

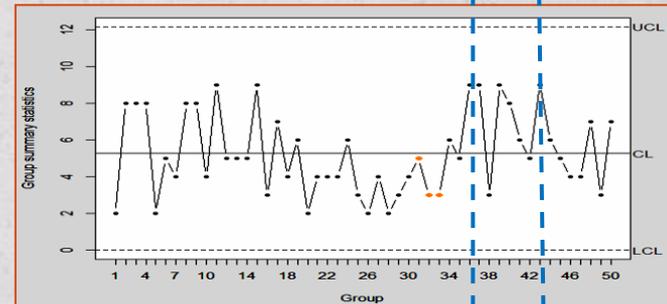


Fuera de control: caso 36 y 43

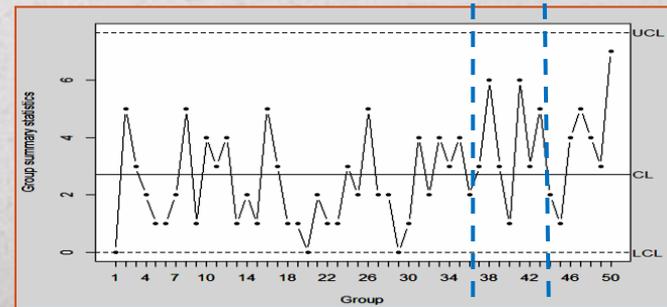
CAP



DC



LC



Señales de fuera de control

Si un gráfico multivariado presenta una señal de fuera de control se hace dificultoso establecer cuál es la variable o que variables causan la alarma.

Hay una interpretación simple para entender las señales de fuera de control en el caso del gráfico Mnp empleando una estadística score Z .

$$Z_i = (c_i - n\bar{p}_i) / \sqrt{\bar{p}_i}$$

Muestra	Z_1	Z_2	Z_3
36	105.17	50.45	-3.44
43	71.47	50.45	61.11

De esta manera se observa que la variable CAP es la responsable de la salida de control del gráfico multivariado.

Gráfico de atributo multinomial (MAC)

Gráfico de control que utiliza a la distribución multinomial como modelo de probabilidad para monitorear múltiples características de calidad.

Puede existir o no correlación entre los niveles o clases de calidad en las que se clasifica un producto.

El Gráfico MAC

Se define la estadística X^2 .

$$x^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(c_i - np_i)^2}{np_i}$$

m = niveles de calidad, mutuamente excluyentes

c_i = el número de unidades en cada nivel de calidad i ($i=1,2,\dots,m$) $\sum c_i = n$

p_i = probabilidad de que un ítem sea no conforme respecto a la característica i

Cada nivel de calidad es una combinación de k características de calidad en una muestra de tamaño n

Estimación de los parámetros

El número de parámetros para las k características es mayor que m ya que se considera la interacción entre ellas.

m puede no ser más grande que k en el caso en que algunas características se ignore al agruparse. Por ejemplo dos características A y B pueden ser agrupadas en A y (B+AB).

x_i el número de unidades no conformes de la característica i en una muestra de tamaño n ,

$$\hat{p}_i = \frac{x_i}{n}$$

$x_{i,j,\dots,l}$ el número de unidades no conformes de las características i, j, \dots, l en una muestra de tamaño n

$$\hat{p}_{i,j,\dots,l} = \frac{x_{i,j,\dots,l}}{n}$$

$$\hat{p}_c = 1 - \sum \hat{p}_i - \sum \hat{p}_{i,j,\dots,l}$$

Caso de aplicación

Las pantallas de cristal líquido (LCD) son ampliamente utilizados en televisores, ordenadores portátiles, teléfonos móviles y otros productos electrónicos. Hay diferentes métodos básicos para inspeccionar los defectos superficiales: inspección visual artificial; método de detección de parámetros eléctricos, y método de inspección visual automático. La detección de defectos superficiales como líneas y puntos faltantes son atributos que pueden estar correlacionados y constituyen defectos graves.

(Chiu y Kuo, 2010)

Se consideran $k=2$ características de calidad:

A: líneas faltantes y B: puntos faltantes

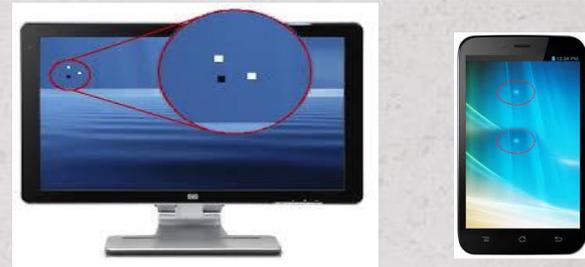
$p_1 = 0.001$ y $p_2 = 0.003$ probabilidad de no conformidad de cada característica de calidad.

$p_g = 0.002$ probabilidad de ocurrencia conjunta de no conformidad en las 2 características

$n=5000$

los parámetros de la distribución multinomial son $M(5000; 0.001, 0.003, 0.002, 0.994)$

$p_c = 0.994$ probabilidad de obtener una unidad libre de disconformidad (defecto)



Cada unidad se pueden clasificar en 4 niveles de calidad mutuamente excluyentes:

- Disconformidad sólo del tipo A
- Disconformidad sólo de tipo B
- Disconformidades A y B
- Conformes

Datos

Nº	A	B	AB	C	Estadístico
1	3	20	5	4972	4,97
2	4	20	6	4970	3,47
3	4	14	8	4974	0,67
4	6	22	13	4959	4,39
5	2	9	17	4972	9,1
6	3	16	10	4971	0,87
7	2	16	10	4972	1,87
8	5	12	12	4971	1
9	3	18	11	4968	1,5
10	4	13	15	4968	2,97
....					
121	8	13	9	4970	2,17
122	13	12	10	4965	13,41
123	12	16	7	4965	10,77
124	11	23	6	4960	13,09
125	14	14	11	4961	16,38

El cambio del proceso fue introducido a partir de la muestra 122 con p_1 de 0.001 a 0.0015.

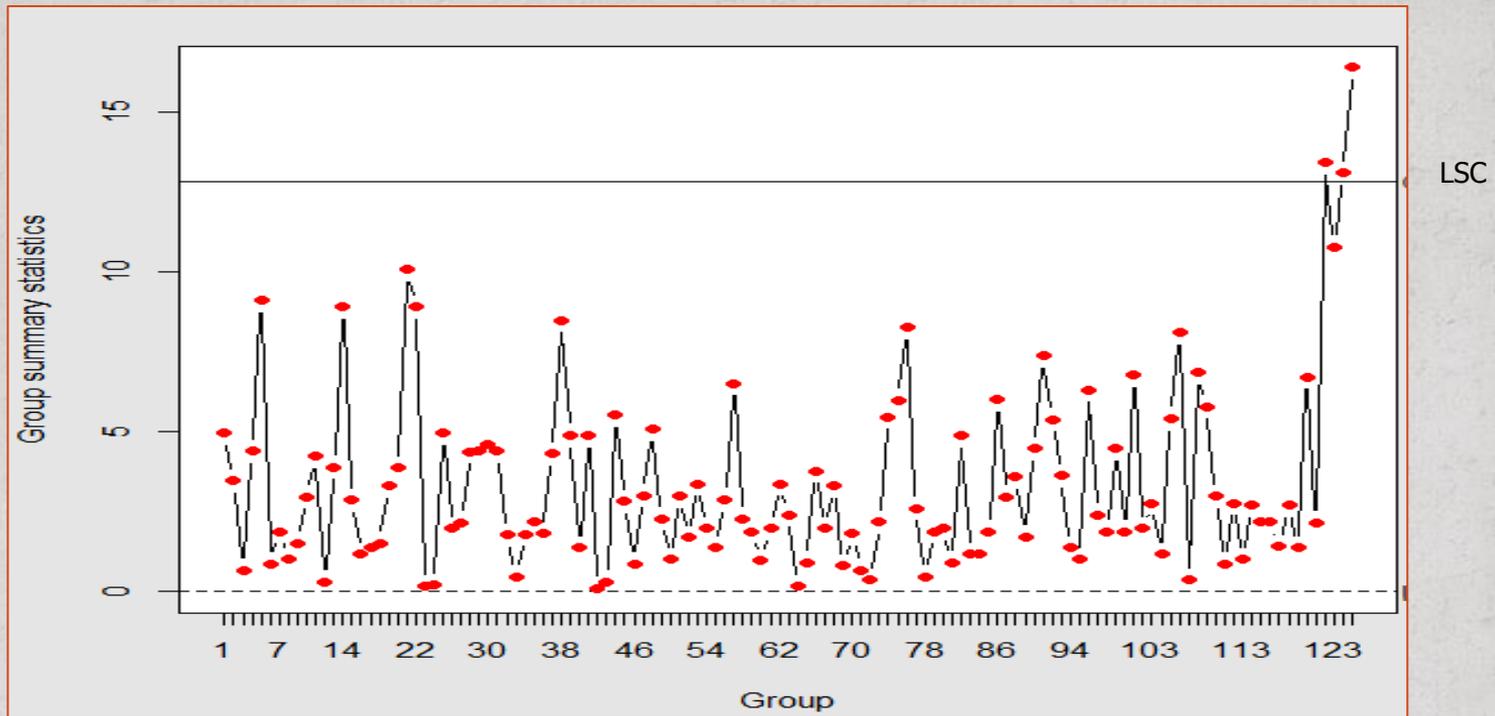
Parámetros

	A	B	AB	C
p	0,001	0,003	0,002	0,994
n	5000	5000	5000	5000
np	5	15	10	4970

LSC= 12.8381

valor de $x^2_{(3; 0,005)} = 12.8381$

Gráfico Multivariado



Los puntos 122,124 y 125 se encuentran fuera de control

Señales de fuera de control

los gráficos de control chi cuadrado son fácil de usar cuando hay un cambio en la variable, debido a que es fácil descomponer en m estadísticos χ^2 como

$$\chi^2 = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_m$$

donde $z_i = (c_i - np_i)^2 / np_i$

Entre los m estadísticos el mayor valor de z_i será el que más contribuya a la desviación.

Muestra	Z1	Z2	Z3	Z4
121	1,8	0,27	0,1	0
122	12,8	0,6	0	0,01
123	9,8	0,07	0,9	0,01
124	7,2	4,27	1,6	0,02
125	16,2	0,07	0,1	0,02

Estudio del ARL

$p1^*$	$p2$	pg	pc	lambda	1-beta	ARL
0,0001	0,003	0,002	0,9949	4,0541	0,11589	8,63
0,0002	0,003	0,002	0,9948	3,2032	0,08099	12,35
0,0004	0,003	0,002	0,9946	1,8018	0,03662	27,31
0,0006	0,003	0,002	0,9944	0,8008	0,01559	64,14
0,0008	0,003	0,002	0,9942	0,2002	0,00715	139,80
0,001	0,003	0,002	0,994	0,0000	0,00500	200
0,0012	0,003	0,002	0,9938	0,2002	0,00715	139,80
0,0014	0,003	0,002	0,994	0,8008	0,01559	64,14
0,0016	0,003	0,002	0,993	1,8018	0,03662	27,31
0,0018	0,003	0,002	0,993	3,2032	0,08099	12,35
0,002	0,003	0,002	0,993	5,0050	0,16102	6,21

Obtener el valor del parámetro de no centralidad λ
 potencia de la prueba para una probabilidad de falsa alarma α .

potencia de la prueba $1 - \beta = P[\lambda \geq x^2(m - 1)]$

donde
$$\lambda = n \sum_{i=1}^m \frac{(p_i^* - p_i)^2}{p_i}$$

$$ARL = 1/(1 - \beta)$$

Comentario final

- ✓ El monitoreo de procesos multiatributo binomiales y multinomiales constituyen un área de continuo desarrollo.
- ✓ Los procedimientos actuales son muy variables debido a que dependen de: la cantidad de atributos, la proporción de no conformidades, del estado en el que se encuentra el proceso (bajo o fuera de control) o de la posibilidad de normalizar los datos.
- ✓ La dificultad en determinar el atributo responsable de la señal fuera de control.
- ✓ Las nuevas propuestas están orientadas a:
 - Eliminar asimetría y correlación entre las variables mediante transformaciones, para luego aplicar los tradicionales gráficos de Shewhart.
 - Detectar el punto de cambio con diferentes metodologías.

Bibliografía

- Chiu JE, Kuo TI (2010) Control charts for fraction nonconforming in a bivariate binomial process. *J Appl Stat* 37:1717–1728.
- Doroudyan, M. and Amiri, A. (2013). Monitoring multivariate–attribute processes based on transformation techniques. *Int J Adv Manuf Technol* 69, 2161–2172.
- Cozzucoli PC (2009) Process monitoring with multivariate p control chart. *Int J Qual Stat Reliab.* doi:10.1155/2009/707583, Article ID 707583.
- Gadre, M. P. and Rattihalli, R. N. (2004). Exact multi-attribute acceptance single sampling plan. *Communications in Statistics - Theory and Methods.* 33(1), 165–180.
- Haridy S, Wu Z, Abhary K, Castagliola P, Shamsuzzaman M. Development of a multiattribute synthetic-np chart. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 2014; **4**:1884–1903.
- Jolayemi, J.K. (2000). An optimal design of multi-attribute control charts for processes subject to a multiplicity of assignable causes. *Applied Mathematics and Computation* 114:187-203.
- Li, J., Tsung, F. and Zou, C. (2014) Multivariate binomial/multinomial control chart. *IIE Transactions*, 46, 5, 526–542.
- Li, J., Tsung, F. and Zou, C. (2012). Directional control schemes for multivariate categorical processes. *Journal of Quality Technology*, 44, 136–154.
- Lu, X.S., Xie, M., Goh, T.N. and Lai, C.D. (1998). Control charts for multivariate attribute processes. *International Journal of Production Research*, 36, 3477–3489.
- Marcucci, M. (1985). Monitoring multinomial processes. *Journal of Quality Technology*, 17, 86–91.
- Niaki, S.T.A., Abbasi, B. (2006). NORTA and neural networks based method to generate random vectors with arbitrary marginal distributions and correlation matrix. In proceedings of the 17th IASTED International Conference on Modeling & Simulation (MS2006): 234-239, Montreal, Canada.
- Niaki, S.T.A. and Abbasi, B. (2007). On the monitoring of multi-attribute high-quality production processes. *Metrika*, 66, 373–388.
- Niaki, S.T.A, Javadi, S., Fallahnezhad, M.S. (2014). A Hybrid Root Transformation and Decision on Beliefs Approach to Monitor Multi-attribute Poisson Processes. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 75, (9) ,1651-1660.
- Patel, H.I. (1973). Quality control methods for multivariate binomial and Poisson distributions. *Technometrics*, 15, 103–112.
- Ramirez y Cantú (2016), Carta de control para procesos multinomiales: estudio de desempeño. *Ingeniería Investigación 68 y Tecnología*, v.XVIII
- Xie, M., Goh, T., and Kuralmani. V. (2002). *Statistical models and control charts for high-quality processes*. Boston, Kluwer Academic Publication.